Travaux Dirigés : Série 1

Exercice 1

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

1- Calculer $A^2 - 2A + 2I_2$

on a $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}$$

$$2I_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A + 2I_2 = 0.$$

2- En déduire que A est inversible et donner A^{-1}

A inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $AB = BA = I_2$

on a $A^2 - 2A + 2I_2 = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A = -2I_2$

$$\Leftrightarrow \frac{-A^2 + 2A}{2} \Leftrightarrow A\left(I_2 - \frac{1}{2}A\right) = I_2$$

on pose $B = I_2 - \frac{1}{2}A$.

donc A est inversible et $A^{-1} = I_2 - \frac{1}{2}A$.

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- Calculer $A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3$

on a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

on a $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$-3A^2 = -3\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ (5)

2) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

on a $A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^3 - 3A^2 + 4A = 2I_3$

$\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + 2I\right) = I_3$.

on pose $B = \frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + 2I$.

on a $A \times B = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \underset{=B}{\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + 2I}$

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et l'application

$$\begin{aligned} U : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto MA - AM. \end{aligned}$$

Mq. U est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique

1) **U est linéaire $\Leftrightarrow U(M + \lambda M') = U(M) + \lambda U(M')$**

$$\begin{aligned} U(M + \lambda M') &= (M + \lambda M')A - A(M + \lambda M') \\ &= MA + \lambda M'A - AM - A\lambda M' \\ &= MA - AM + \lambda(M'A - AM') \\ &= U(M) + \lambda U(M') \end{aligned}$$

donc U est linéaire

2) on a $U(E(1,1)) = E_{1,1}A - AE_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$

$= -c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -cE_{2,1} + bE_{1,2}$

$+ 0E_{1,1} + 0E_{2,2}$

$U(E_{1,2}) = E_{1,2}A - AE_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = cE_{1,1} + (d-a)E_{1,2} - cE_{2,1}$.

Scanné avec CamScanner

$+ U(E_{2,1}) = E_{2,1}A - AE_{2,1} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b&0\\a-d&b\end{pmatrix}$

$= -b E_{1,1} + (a-d) E_{2,1} + b E_{1,2}$

$+ U(E_{2,2}) = E_{2,2}A - AE_{1,2}$

$= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}A - A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix} = c E_{2,1} - b E_{1,2}$

donc la matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ b & d-a & c & -b \\ -c & 0 & a-d & c \\ 0 & -c & b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Mq la matrice $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\text{rang} = 3 \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\text{rang} = 2$

on a le rang de A égal à $3 \neq 2$ donc A n'est pas inversible

Exercice 5

Mq les matrices $A = \begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&0\end{pmatrix}$ sont inversibles grâce à l'algorithme de GAUSS et donner leur inverse

1) $A = \begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ d'où A est inversible

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&-2&0\end{array}\right)$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}5&-2&1&0\\-2&1&0&1\end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

Vérifions $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$

Scanné avec CamScanner

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ rang(B) = 3 d'où B est inversible

L'inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{2} & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\frac{1}{2} L_1$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $-\frac{1}{2} L_2$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2 & -4/3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2 & -4/3 \end{array}\right)$ $\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4} L_3 \\ L_3 \end{matrix}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2 & -4/3 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2 & -4/3 \end{pmatrix}$

Vérification

$B \times B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2 & -4/3 \end{pmatrix} = I_3$

Scanné avec CamScanner

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.

ona $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2I + N$

avec $N = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ona $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta_2$

donc N est nilpotente de degré 2.

or les matrices $(2I)$ et (N) commutent

donc on peut utilisé la formule du Binôme.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = (2I + N)^n$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2I)^{n-k} (N)^k$

$= C_n^0 (2I)^n I + C_n^1 (2I)^{n-1} N$.

$= 2^n I_2 I + n 2^{n-1} I N$

$= 2^n I + n 2^{n-1} N$.

$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 7

on appelle matrice nilpotente toute matrice carrée N tq $\exists k \in \mathbb{N}$ vérifiant $N^k = 0$.

1 - Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle dans $M_2(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})$.

+ Dans $M_2(\mathbb{R})$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scanné avec CamScanner

4) a) Mq $\Pi - I_3$ est nilpotente

b) En déduire, grâce à la formule du Binôme, l'expression de Π^n

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) on a $\Pi - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a $(\Pi - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $(\Pi - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

donc la matrice $\Pi - I_3$ est nilpotente d'ordre 3

b) En déduire, grâce à la formule du binôme, l'expression de M^n en fct de n.

on a $(\Pi - I_3)$ est nilpotente d'ordre 3, on pose $B = M - I_3$.

donc $M = B + I_3$ avec B nilpotente d'ordre 3

donc $M^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k}$

$= C_n^0 B^0 I_3^n + C_n^1 B I_3^{n-1} + C_n^2 B^2 I_3^{n-2}$

$= I_3 + nB + C_n^2 B^2 = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n & 2n \\ 0 & 0 & 3n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-3n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -n & 2n - \frac{3n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

+ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

2- La somme de 2 matrices nilpotente est elle toujours nilpotente ?

on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^2 = \Theta_2$

ona $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

ona $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

donc $(A+B)^{2n} = I_2$

donc $(A+B)^n (A+B)^n = I_2$

donc $(A+B)^n = I_2$ ou $(A+B)^n = A+B$.

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad (A+B)^n \neq \Theta_2$

d'où $A+B$ n'est pas nilpotente.

3- on suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente. Mq I_n+N est inversible et donner son inverse

on mentre qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $(I_n+N)B = I_n$

on sait que $A^{k+1} - B^{k+1} = (A-B)\sum_{j=0}^{k} A^j B^{k-j}$ $\quad (A \times B = B \times A)$

Considérons $A = I_n$ et $B = -N$

ona $I_n^{k+1} - (-N)^{k+1} = (I_n+N)\sum_{j=0}^{k} (-N)^j (I_n)^{k-j}$

ona N nilpotente donc d'ordre $k \Rightarrow N^{k+1} = \Theta_n$

donc $I_n = (I_n+N)\sum_{j=0}^{k} (I_n)^{k-j}(-N)^j$

donc I_n+N est inversible et $A^{-1} = \sum_{j=0}^{k} (I_n)^{k-j}(-N)^j$

$= I_n - N + N^2 - N^3 + \cdots (-1)^{k-1} N^{k-1} + (-1)^k N^k$

Scanné avec CamScanner

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode de pivot de Gauss $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ 2y+x=-1 \end{cases}$

la matrice associé au système est $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

$S = \{(1,-1)\}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants en utilisant la méthode de pivot de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ -4x+2y+z=3 \\ 10x-5y-6z=-10 \end{cases}$

on a $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & -5 & -6 & -10 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -21 & -15 \end{array}\right)$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d'où le rang est 2 donc les variables principales sont x et z donc $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 7z=5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{7} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{15}{14} \\ z = \frac{5}{7} \end{cases}$

$S = \left\{ \frac{1}{2}y - \frac{15}{14}, y, \frac{5}{7} \right\} / y \in \mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

b) $\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}$

La matrice associée au système (b) est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & m \\ -2 & 1 & m-2 & 1 \\ m & 1 & 2 & 2m-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 + 2L_1 \\ L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & m \\ 0 & 1+2m & m+2 & 1+2m \\ 0 & 1-m^2 & 2(1-m) & -(m-1)^2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & m \\ 0 & 1+2m & m+2 & 1+2m \\ 0 & (1-m)(1+m) & 2(1-m) & -(m-1)^2 \end{array}\right)$$

Si $m \neq 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & m \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 1+2m \\ 0 & 1+m & 2 & +m-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & m \\ 0 & 1+m & 2 & m-1 \\ 0 & 2m+1 & m+2 & 1+2m \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 2 & m \\ 0 & 1+m & 2 & m-1 \\ 0 & m & m & m+2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & m \\ 0 & 1 & (1+m)/2 & (m-1)/2 \\ 0 & m & m & m+2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - mL_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & m \\ 0 & 1 & (1+m)/2 & (m-1)/2 \\ 0 & 0 & m - m\times\frac{1+m}{2} & (m+2) - m\times\frac{m-1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m & m \\ 0 & 1 & (1+m)/2 & (m-1)/2 \\ 0 & 0 & \frac{m-m^2}{2} & \frac{-m^2+3m+4}{2} \end{array}\right)$$

R13 :

Scanné avec CamScanner

C0

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z + my = m \\ 2z + (-1+m)y = m^2 - 1 \\ m(1-m)y = -m^2 + 3m + 4 \end{cases}$$

si $m = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2z + y = -1 \\ 0 = 4 \end{cases}$$ incompatible

d'où $S = \emptyset$

si $m \neq 0$

$$y = \frac{-m^2 + 3m + 4}{m(1-m)}$$

$$z = \frac{m-1}{2} - \frac{1+m}{2} \times \frac{-m^2+3m+4}{m(1-m)}$$

$$= \frac{m-1}{2} - \frac{-m^2+3m+4-m^3+3m^2+4m}{2m(1-m)}$$

$$= \frac{2m^2 - m^3 - m + m^2 - 3m - 4 + m^3 - 3m^2 - 4m}{2m(1-m)}$$

$$= \frac{-8m-4}{2m(1-m)} = \frac{-(4m+2)}{m(1-m)} = \frac{4m+2}{m(m-1)}$$

$$x = m - 2 \times \frac{4m+2}{m(m-1)} - m \times \frac{-m^2+3m+4}{m(1-m)}$$

$$= \frac{m^2(m-1) - 8m - 4 + m^3 - 3m^2 - 4m}{m(m-1)}$$

$$= \frac{m^3 - m^2 - 8m - 4 + m^3 - 3m^2 - 4m}{m(m-1)} = \frac{2m^3 - 4m^2 - 12m - 4}{m(m-1)}$$

d'où $S = \left\{ \left(\frac{2m^3 - 4m^2 - 12m - 4}{m(m-1)} ; \frac{-m^2+3m+4}{m(m-1)} ; \frac{4m+2}{m(m-1)} \right) \right\}$

si $m = 1$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3y + 3z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ rang = 2, variables principales x et y

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - (1-z) - 2z = -z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

$S = \{(-z, 1-z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

$= (0, 1, 0) + \text{Vect}\{(-1, -1, 1)\}$

Scanné avec CamScanner

c) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + aby + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a \cdot L_1 \end{array}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ b(1-a)y + (1-a)(1+a)z = 1-a \end{array}$

si $a \neq 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ by + (1+a)z = 1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - b \times \frac{1}{(a-1)} L_2$

$\Rightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-a1 \\ (1+a)z + z = 1 - \frac{b-1}{a-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ (a+2)z = \frac{a-b}{a-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ (a+2)(a-1)z = a-b. \end{cases}$

si $a \neq -2$

$\begin{cases} x = -by - az \\ b(a-1)y = b-1-(1-a)z \\ z = \frac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

ona $b-1 = b(a-1)y + \frac{(1-a)(a-b)}{(a-1)(a+2)}$

$b-1 + \frac{a-1}{a+2} = b(a-1)y$

$\frac{(a+2)(b-1)+(a-b)}{a+2} = b(a-1)y$

si $b=0$

$\frac{-(a+2)+a}{a+2} = 0 \Rightarrow \frac{-2}{a+2} = 0$

$S = \emptyset$

si $b \neq 0$

$y = \frac{(a+2)(b-1)(a-b)}{b(a+2)(a-1)} = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$

ona $x + by + az = 1$

$\Rightarrow x + \frac{ab+b-2}{(a-1)(a+2)} - \frac{a(a-b)}{(a+2)(a-1)} = 1$

$\Rightarrow x = 1 - \frac{b-2+a^2}{(a+2)(a-1)} = \frac{a^2+a-2-b+2-a^2}{(a+2)(a-1)}$

$= \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$

si $a \neq -2$ et $a \neq 1$

$S = \left\{\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)\right\}$

si $a = 2$

$\begin{cases} x+6y-2z=1 \\ -3by+3z=b-1 \\ 0=-2-b \end{cases}$

si $b \neq -2$ $\quad S = \emptyset$

si $b = -2$

$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 6y+3z=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2y+2z=1 \\ y=\frac{-3-3z}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2\left(\frac{-3-3z}{6}\right)-2z= \\ y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{-3}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = (0, -\frac{1}{2}, 0) + vect\{(1, -\frac{1}{2}, 1)\}$$

si $a = 1$

$$\begin{cases} x + by + 3 = 1 \\ 0 = b - 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $b \neq +1$ $\quad S = \emptyset$

si $b = +1$ $\quad x + y + 3 = 1$

$x = 1 - y - 3$.

$$S = \{(-y - z + 1, y, z) / y, z \in R\}$$

$$= (1, 0, 0) + vect\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

Exercice 10

Résoudre dans R^4 les systèmes suivants en utilisant la méthode de pivot de Gauss.

$$(S_1) \quad \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1$

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -t = 0 \\ -t = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow rang = 2$$ variables principales sont x et t $\quad x = y - z$.

$$S = \{(y - z, y, z, 0) / y, z \in R$$

$$= (0, 0, 0, 0) + vect\{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x + 2z + my = m \\ x + (1+m)y = m^2 + 3m + 4 \end{cases}$$

Exercice 10

$$(S_2) \quad \begin{cases} ax - by + t = a \\ bx + ay + z = b \\ y + az - bt = a \\ x + bz + at = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + bz + at = b \\ ax - by + t = a \\ bx + ay + z = b \\ y + az - bt = a \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + bz + at = b \\ -by - abz + (1-a^2)t = a(1-b) \\ ay + (1-b^2)z = b - b^2 \\ y + az - bt = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + bz + at = b \\ y + az - bt = a \\ -by - abz + (1-a^2)t = a(1-b) \\ ay + (1-b^2)z = b(1-b) \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + bL_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - aL_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + bz + at = b \\ y + az - bt = a \\ (1-(a^2+b^2))z + abt = b - (a^2+b^2) \\ (1-(a^2+b^2))t = a \end{cases}$$

si $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{cases} x + bz + at = b \\ y + az - bt = a \\ abt = b - 1 \\ 0 = a \end{cases}$$

si $a \neq 0$ $\quad S = \emptyset$

si $a = 0$

$$\begin{cases} x + bz = b \\ y - bt = 0 \\ 0 = b - 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

si $b \neq 1$ $\quad S = \emptyset$

si $b = 1$

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = t \end{cases}$$

$$S = \{(1-z, t, z, t) / z, t \in \mathbb{R}\}.$$

$$= (1,0,0,0) + \text{Vect}\{(-1,0,1,0) ; (0,1,0,1)\}$$

Scanné avec CamScanner